Il fluido ideale

Nel caso di fluido ideale si suppone $\nu = 0$, quindi le equazioni di legame costitutivo e di moto divengono:

$$\mathbb{T} = -p\,\mathbb{I} \qquad\qquad \rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \underline{f} - \nabla p$$

Consideriamo inoltre fluido barotropico, campo di forze conservativo e moto stazionario ovvero, rispettivamente, $\rho = \rho(p)$, $\underline{f} = \nabla \varphi$ e $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Recuperiamo la seguente identità matematica:

$$(\underline{v} \cdot \nabla) \cdot \underline{v} = \nabla \left(\frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2} \right) - \underline{v} \times \underline{\omega}$$

Sostituiamola nell'equazione di moto dopo aver applicato la relazione tra derivata totale e derivata locale:

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \Big[\underbrace{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}}_{=0} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} \Big] = \rho \nabla \varphi - \nabla p \Rightarrow \frac{\nabla(\underline{v} \cdot \underline{v})}{2} + \nabla \int \frac{dp}{\rho} - \nabla \varphi = \underline{v} \times \underline{\omega}$$

$$\Rightarrow \nabla \left(\frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - \varphi \right) = \underline{v} \times \underline{\omega} \quad \Rightarrow \nabla \left(\frac{v^2}{2g} + \int \frac{dp}{\gamma} - \frac{\varphi}{g} \right) = \frac{\underline{v} \times \underline{\omega}}{g}$$

Ricordando che l'espressione tra parentesi rappresenta il carico totale:

$$H = \frac{v^2}{2g} + \int \frac{dp}{\gamma} - \frac{\varphi}{g} \quad \Rightarrow \nabla H = \frac{\underline{v} \times \underline{\omega}}{g}$$

In definitiva abbiamo espresso il teorema di Bernoulli. Dobbiamo solo proiettare l'equazione lungo una linea di corrente o di vorticità. Il vettore $\underline{v} \times \underline{\omega}$ è perpendicolare sia a $\underline{v}$ che a $\underline{\omega}$, quindi la sua proiezione lungo una delle linee predette è nulla:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - \varphi \right) = 0$$

Con s ascissa curvilinea. Ne segue che:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} - \frac{\varphi}{g} = \text{cost} \quad \text{lungo linee di corrente e di vorticità}$$